Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών
Σχολή Θετικών Επιστημών
Μαθηματικό Τμήμα
Τομέας Διδακτικής και Μεθοδολογίας των Μαθηματικών
Μεταπτυχιακό πρόγραμμα σπουδών στην διδακτική και μεθοδολογία των Μαθηματικών

Μάθημα : ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΑ
Διδάσκων: Χρόνης Κυνηγός

Εργασία: *«Εισαγωγή μιας συστηματικότερης διδασκαλίας σε σχέση με τις έννοιες μέτρησης μεγάλου πλήθους η του απείρου στο Γυμνάσιο-΄Λυκείο με ελκυστικους τρόπους»*

μεταπτυχιακός φοιτητής

Ιωάννης Π. Πλατάρος

Α.Μ. 211502

Εργασία: *«Εισαγωγή μιας συστηματικότερης διδασκαλίας σε σχέση με τις έννοιες μέτρησης μεγάλου πλήθους η του απείρου[1] στο Γυμνάσιο-Α΄Λυκείου με ελκυστικους τρόπους»*

Ο. Περίληψη

Η παρούσα εργασία αφορά στην διδασκαλία ορισμένων θεμάτων στην δευτεροβάθμια εκπαίδευση που αφορούν σε μετρήσεις πολύ μεγάλου πλήθους , που προσεγγίζουν την έννοια του άπειρου και του απειροστού . Η προσέγγιση γίνεται είτε μέσω ανοικτού προβλήματος και κατά ομάδες εργασίας των μαθητών , είτε και με ομαδική συμμετοχή της τάξης ανάλογα με την ευρύτητα –σημαντικότητα του θέματος.

1. Επιστημολογικά προβλήματα κατά την διδασκαλία της έννοιας του απείρου

α) Το άπειρο ως έννοια

Κάθε φορά που σκεπτόμαστε το άπειρο , μπορεί να εννοούμε μια αόριστη ποσότητα της οποίας το μέγεθος έχει υπερβεί κάθε όριο ή

Μια συγκεκριμένη ποσότητα ,την οποία φανταζόμαστε ότι μεγαλώνει αδιάκοπα , αλλά πάντα αυτή μένει μικρότερη από αυτήν που λέμε άπειρη.

---

[1] «Ανέκαθεν το άπειρο διήγηρε την ανθρώπινη ψυχή, περισσότερο από κάθε άλλο ζήτημα. Δύσκολα μπορεί να βρεθεί μια ιδέα που να έχει ερεθίσει τόσο γόνιμα το λογικό , όσο αυτή του απείρου. Εν τούτοις, καμία άλλη έννοια δεν χρειάζεται

β) Το άπειρο δεν είναι αριθμός

Ο ορισμός της έννοιας του αριθμού , μέσα από τις συνεχείς επεκτάσεις που έγιναν είναι αρκετά δύσκολος , αφού ξεκινάμε από τους φυσικούς, πάμε στους ακεραίους , στους ρητούς , μετά στους άρρητους και τους πραγματικούς , επεκτεινόμαστε στους μιγαδικούς, αλλά μπορούμε να φθάσουμε μέχρι και την (φιλοσοφική) έννοια των διατακτικών αριθμών. Έτσι έχουμε αρκετά είδη αριθμών . Για να αποκλείσουμε το άπειρο από τα είδη των αριθμών θα πρέπει να του αφαιρέσουμε μια χαρακτηριστική ιδιότητα που έχουν όλοι οι αριθμοί!

Ας δούμε ποια είναι αυτή:

Ο μαθητής μπορεί εύκολα να καταλάβει ότι για κάθε φυσικό υπάρχει ένας μεγαλύτερός του. Αν όμως έχει κατά νου το μοντέλο των φυσικών, δηλαδή ως ένα σύνολο μονάδων για το οποίο δεν υπάρχει μεγαλύτερο, τότε παύει το άπειρο να έχει αυτή την ιδιότητα των αριθμών. Άρα δεν είναι αριθμός . δηλαδή, δεν υπάρχει μεγαλύτερος «αριθμός» από το άπειρο.

γ) Το άπειρο δεν είναι ποσότητα

Η ποσότητα επιδέχεται ελάττωση κι αύξηση . Το άπειρο όμως ούτε μπορεί να αυξηθεί επειδή είναι πάνω από κάθε ποσότητα , ούτε μπορεί να ελαττωθεί , επειδή έτσι γίνεται κι αυτό ποσότητα πεπερασμένη.

Βεβαίως δεν είναι ποσότητα, αλλά συνάπτεται με την ποσότητα .

διαφώτιση , όσο αυτή» D. HILBERT στο ιστορικό του άρθρο «Για το άπειρο» (On Infinity)

Για παράδειγμα αν έχω το μοντέλο του άπειρου με τους φυσικούς αριθμούς , τότε το άπειρο συγκρίνεται με κάθε φυσικό κι είναι μεγαλύτερό του, άρα είναι «ομοιογενές» (όχι ομοειδές!) με τους αριθμούς.

Αν στο μυαλό μου έχω της ευθείας ως «απεριόριστο ευθύγραμμο τμήμα» τότε πάλι έχω την έννοια του απείρου να συνάπτεται με το πεπερασμένο (ευθύγραμμο τμήμα) ως την «ομοιογενή» ευθεία.

δ) Το άπειρο είναι κριτήριο για το πεπερασμένο;

Θα κάνουμε την προσέγγιση αυτή με παράδειγμα:
Ας θεωρήσουμε , ότι έχουμε το πρόβλημα να εκτιμήσουμε αν οι κόκκοι της άμμου όλων των θαλασσών της Γης είναι άπειροι ή πεπερασμένοι. Μπορούμε να παραθέσουμε το εξής επιχείρημα:

(i) Όλοι γνωρίζουμε ότι η γη είναι πεπερασμένη.

(ii) Αρχίζουμε με μια μεγάλη ταχύτητα να βγάζουμε άμμους από την Γη προς το διάστημα , μέσα από μηχανές απαρίθμησης. Στην ανάγκη φανταζόμαστε εκατομμύρια τέτοιες μηχανές που λειτουργούν με μεγάλη ταχύτητα. Εδώ οι προσλαμβάνουσες παραστάσεις των μαθητών είναι προς την κατεύθυνση αποδοχής του σχήματος αυτού , αφού η διαδικασία αναζήτησης αρχείων ή ελέγχου ενός Η/Υ για ιούς , είναι ουσιαστικά διαδικασίες απαρίθμησης μέσω μιας μηχανής. Άρα η διαδικασία αυτή ,γίνεται αντιληπτό , ότι θα μας οδηγήσει σε πέρας και σε απαρίθμηση!…..

Κατόπιν του ανωτέρω επιχειρήματος δεν υπάρχει σχεδόν κανείς άνθρωπος να αμφιβάλει περί τούτου, αφού το ανθρώπινο πνεύμα συλλαμβάνει την ιδέα ότι κάτι που διασπείρεται-

κατανέμεται σε πεπερασμένο χώρο , δεν μπορεί παρά να είναι πεπερασμένο!

Στην ουσία όμως το παραπάνω επιχείρημα είναι δίκοπο μαχαίρι, αφού άνετα μπορεί να πείσει κάποιον ότι οι κόκκοι της άμμου όλων των θαλασσών είναι πεπερασμένοι, από την άλλη όμως μπορεί να τον παγιδέψει στην λογική των επιχειρημάτων του Ζήνωνα του Ελεάτη , σχετικά με το βέλος που δεν φθάνει ποτέ στον στόχο του

[2] Ή «με το μη εκκινούν»[3] ή με το γνωστότερο του «ωκύποδα»(=γοργοπόδαρου) Αχιλλέα που δεν κατορθώνει να φθάσει την προσωποποίηση της βραδύτητας χελώνα [4]

Κοινός παρονομαστής των παραδόξων του Ζήνωνα είναι η προφανής αδυναμία του ανθρωπίνου πνεύματος να παραδεχθεί ως προφανές ότι το άπειρο μπορεί να ενυπάρχει στο πεπερασμένο . Από προσωπική εμπειρία του υπογράφοντος , είναι γνωστό, όταν το ερώτημα τεθεί ακόμα και σε τελειόφοιτους των μαθηματικών με ένα κατάλληλο καμουφλάρισμα οδηγεί στο

---

[2] Σύμφωνα με αυτό για να πάει το βέλος στον στόχο του , θέλει κάποιο χρόνο $τ_1$ για να πάει μέχρι την μέση της διαδρομής, $τ_2$ για να πάει μέχρι την μέση της υπολειπόμενης(=το μισό του μισού=1/4 της αρχικής) διαδρομής, $τ_3$ μέχρι την μέση της υπολειπόμενης της υπολειπόμενης διαδρομής(=το μισό του μισού του μισού =το 1/8 της αρχικής) κ.ο.κ. κι αυτό συνεχίζεται επ' άπειρον, άρα πάντα θέλω κάποιον χρόνο, άρα ….ποτέ δεν θα φθάσει!

[3] Σύμφωνα μ' αυτό , για να πάω από τον πίνακα της τάξης μέχρι την πλατεία της πόλης, πρέπει πρώτα να πάω μέχρι τον περίβολο του σχολείου, για να πάω όμως μέχρι τον περίβολο πρέπει πρώτα να πάω μέχρι την εξώπορτα , για να πάω όμως μέχρι την εξώπορτα πρέπει πρώτα να πάω μέχρι την πόρτα της τάξης, για να πάω όμως μέχρι την πόρτα της τάξης πρέπει πρώτα να πάω 5 βήματα, για να πάω όμως 5 βήματα πρέπει πρώτα να πάω 4 βήματα, …3 βήματα, 2 βήματα, 1 βήμα, ½ του βήματος, ¼ του βήματος, 1/8 του βήματος , 1/16 του βήματος, 1/32 του βήματος, 1/64 του βήματος κι αυτό μπορεί να συνεχιστεί επ΄άπειρον , άρα δεν πάω στην πλατεία ….ποτέ!

[4] Η χελώνα προπορεύεται κι ο Αχιλλέας προσπαθεί να την προφθάσει. έτσι, μέχρι να πάει ο Αχιλλέας μέχρι εκεί που είναι η χελώνα **τώρα**, αυτή θα έχει προλάβει να πάει κι άλλο λίγο ακόμα. Μέχρι να ξαναπάει ο Αχιλλέας μέχρι εκεί που είναι η χελώνα **τώρα**, αυτή θα έχει προχωρήσει κι άλλο λίγο ! Και αυτή η αλυσίδα έχει άπειρα βήματα, άρα ο Αχιλλέας δεν θα φθάσει ποτέ την χελώνα!

ίδιο λάθος που η Ιστορική εμπειρία έχει καταγράψει χιλιάδες φορές!

Συγκεκριμένα το ερώτημα τίθεται ως εξής:
«Αν προσθέσω άπειρους στο πλήθος θετικούς αριθμούς , τι αποτέλεσμα θα πάρω; Άπειρο ή πεπερασμένο;»
Η συντριπτική πλειονότητα των απαντήσεων εδώ είναι του τύπου «προφανώς άπειρο!»

Βεβαίως αυτή η απάντηση μπορεί να εισπραχθεί ακόμα κι από πρόσωπα που έχουν γνωρίσει κι ίσως αποδείξει ότι

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+.........=1$$

Εδώ κάποτε μου αντέτεινε ένας φοιτητής ότι αυτό συμβαίνει διότι ναι μεν κάθε φορά προσθέτουμε κάτι, αλλά αυτό το κάτι είναι μικρότερο από το προηγούμενο, έτσι στο τέλος «εκφυλίζεται» και δεν είναι ικανή η διαρκής πρόσθεση να απειρίσει το άθροισμα…..

Τότε του υπενθύμισα ότι $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+........=+\infty$ Το ίδιο δεν ισχύει κι εδώ;
Έφυγε σκεπτικός ……[5]

---

[5] Ο Alain Duroux ορίζει ένα επιστημολογικό εμπόδιο με 4 χαρακτηριστικά:
α)Είναι μια γνώση με ένα αρκετό πεδίο εφαρμογής (ισχύει προφανώς για το άπειρο στα μαθηματικά)
β) Αυτή η γνώση προσπαθώντας να εφαρμοσθεί και σε άλλες καταστάσεις , προκαλεί λάθη που εντοπίζονται και αναλύονται μόνο σε σχέση με το εμπόδιο . (εδώ έχομε ακριβώς αυτό το χαρακτηριστικό)
γ)Το εμπόδιο αντιστέκεται στην προσπάθεια εξειδικευμένης εφαρμογής του. (προφανώς κι εδώ έχομε ισχύ)
δ) Η απόρριψη της γνώσης που συναντά επιστημολογικό εμπόδιο, δημιουργεί την νέα γνώση. (Εδώ η «γνώση» ότι άπειροι θετικοί έχουν πάντα άπειρο άθροισμα κλονίζεται αποφασιστικά.)
Εξ άλλου ο Sierprinska δίνει τον ορισμό του επιστημολογικού εμποδίου ως εξής:
Αν το εμπόδιο δεν είναι δικό μας εμπόδιο, ή πιθανόν και δύο άλλων ανθρώπων, αλλά είναι πιο πλατειά διαδεδομένο , ή έχει διαδοθεί κάποια φορά σε κάποιο πολιτισμό, αυτό λέγεται επιστημολογικό εμπόδιο. Η ίδια η φύση των επιστημολογικών εμποδίων είναι τέτοια , που δεν μπορούν να αποφευχθούν και ο ρόλος τους στην σκέψη μας είναι σημαντικός .

Βέβαια αυτά τα προβλήματα με το άπειρο και τις άπειρες ποσότητες ταλαιπωρούν αρχαιόθεν το ανθρώπινο πνεύμα και βέβαια αυτή η ταλαιπωρία στάθηκε αφορμή για καλύτερους ορισμούς μαθηματικών θεωριών.

ε) Το άπειρο ως πηγή παραδόξων

Η παραδοχή απείρων μαθηματικών αντικειμένων οδηγεί σε παράδοξα:
Λόγου χάριν

Το σύνολο όλων των συνόλων έχει τον μέγιστο πληθικό αριθμό (=ισχύ) από όλα τα σύνολα. Αλλά το δυναμοσύνολό του έχει μεγαλύτερη ισχύ ! (αυτή είναι μια πρόταση που μπορεί να αποδειχθεί) Τότε τι συμβαίνει;

Το σύνολο όλων των συνόλων , ως σύνολο που είναι είναι και στοιχείο του εαυτού του; (Ένα σύνολο μέρος του εαυτού του;)
Η **υπόθεση του συνεχούς** του Cantor[6] κατέστη πηγή γόνιμων συζητήσεων για τα μαθηματικά

Αλλά ήδη από τον Μεσαίωνα είχε γίνει σαφές ότι δύο ομόκεντροι κύκλοι μπορούν να θέσουν τα σημεία τους σε 1-1 αντιστοιχία (Κάθε σημείο του μεγάλου κύκλου μέσω της ακτίνας που αντιστοιχεί στο σημείο, αντιστοιχεί και σε σημείο του μικρού κύκλου. Κι αυτό ισχύει κι αντιστρόφως για τον μικρό κύκλο. Από

[6] Ο Cantor υπέθεσε ότι δεν υπάρχει ενδιάμεση ισχύς συνόλου ανάμεσα στην άλεφ μηδέν των φυσικών ($\aleph_0$) και την ισχύ του συνεχούς C . O Godel έδειξε ότι αυτή μπορεί να εκληφθεί ως μια πρόσθετη αξιωματική υπόθεση, διότι αν υπάρχει αντίφαση στην περιορισμένη θεωρία συνόλων μαζί με αυτό το πρόσθετο αξίωμα, τότε πρέπει να υπάρχει ήδη μια κρυμμένη αντίφαση στην περιορισμένη θεωρία των συνόλων.

την άλλη είναι προφανές ότι ο μεγάλος κύκλος έχει περισσότερα σημεία από τον μικρό! Άρα;…………

Γύρω στα τέλη του 17^{ου} αιώνα και στις αρχές του 18^{ου} οι μαθηματικοί είχαν αρχίσει να κατανοούν αρχές της ανάλυσης. Κι εδώ όμως τα παράδοξα του απείρου δεν άργησαν να φανούν: Μεγάλος λόγος έγινε για το άθροισμα της άπειρης σειράς

S= 1-1+1-1+1-1+1-1+1-1+1……………

Κάποιοι είπαν:

S= (1-1)+(1-1)+(1-1) +(1-1)+(1-1)+……..=0+0+0+0+…….=0

Άλλοι πάλι το είδαν ως

S= 1-(1-1)-(1-1)-(1-1)-(1-1)-(1-1)-……..=1-0-0-0-0-0-…….=1

O Louitzi Guino Grandi(1671-1742) έδωσε την «Σολομόντια» λύση:

Υποστήριξε ότι επειδή οι τιμές για το άθροισμα 0 ή 1 «είναι εξ ίσου πιθανές» , τότε

S= 1-(1-1+1-1+1-1+1-1+1-1+1-1+……..)=1-S

Άρα $S=1-S \Rightarrow 2S=1 \Rightarrow S=\frac{1}{2}$

Την ίδια περίοδο ο Leibniz υπελόγιζε την παράγωγο της συνάρτησης $Y=2\chi^2$ ως εξής:

$Y+\Delta y = 2(x+\Delta x)^2 \Rightarrow$

$Y+\Delta y = 2x^2+4x\Delta\chi + (\Delta\chi)^2 \Rightarrow$ (διαγράφονται τα ίσα y και $2\chi^2$)

$\Delta y = 4x\Delta\chi + (\Delta\chi)^2 \Rightarrow$ (Με διαίρεση και των δύο μελών με Δχ)

$\frac{\Delta y}{\Delta\chi} = 4\chi + \Delta\chi \Rightarrow$ (Επειδή Δχ «μηδενικό»)

$\frac{\Delta y}{\Delta\chi} = 4\chi$ που είναι το σωστό σύγχρονο αποτέλεσμα, πλην όμως , ο Leibniz δέχθηκε σκληρή κριτική για το τι είδους

μαθηματικά κάνει όταν δέχεται αντικείμενο με μηδενικές ιδιότητες με το οποίο μάλιστα διαιρεί ![7]……..

επιστημολογικά η Ανάλυση ακόμα «πληρώνει» τον συμβολισμό του Leibniz dy/dx ο οποίος ακόμα εκλαμβάνεται ως πηλίκον διαιρέσεως , αφού πολλές ιδιότητες των διαφορικών χειρίζονται με τις ιδιότητες της διαίρεσης, αλλά από την άλλη ο ρόλος του διαφορικού dx ως συνάρτησης εξαφανίζεται!……..

2. Πως βοηθά η Ιστορία της εξέλιξης κάποιων μαθηματικών εννοιών στην διδακτική τους;

Πρόκειται για ένα πεδίο όπου έχουν αναπτυχθεί αξιοπρόσεκτοι προβληματισμοί που αφορούν και την δύσκολη έννοια του απείρου στα μαθηματικά.

Σταχυολογούμε ορισμένες γνώμες ειδικών :

Horst Struve :

-Τα προβλήματα των μαθητών πολλές φορές είναι επιστημολογικά και οφείλονται στην φύση αυτών των εννοιών.

-Πρέπει να μελετήσουμε την Ιστορία των μαθηματικών, γιατί τα προβλήματα που εμφανίσθηκαν , είναι παρόμοια με αυτά που αντιμετωπίζουν οι μαθητές μας.

E.Berbin :

- Η Ιστορία των μαθηματικών είναι μια μορφή «θεραπείας» του δογματισμού στην διδασκαλία των μαθηματικών.
- -Η ιστορία μας βοηθά να συλλάβουμε την σημασία και το νόημα των μαθηματικών εννοιών και θεωριών.

Paolo Boero :

[7] Συγκεκριμένα ο Berkeley έλεγε πως μια τέτοια διαδικασία δεν θα μπορούσε να είναι δεκτή.(Διονύσιος Αναπολιτάνος «Εισαγωγή στην φιλοσοφία των Μαθηματικών» εκδόσεις Νεφέλη)

- Να οδηγούμε τους μαθητές σε μια διδακτική «προβληματική» κατάσταση, υπόχρεώνοντάς τους να περάσουν από τα ιστορικά στάδια κατασκευής μιας έννοιας

Francesco Speranza :

Να παρατηρούμε τα επιστημολογικά εμπόδια που έπρεπε να ξεπεράσει η ανθρωπότητα για να περάσει από την μια θεωρία στην άλλη . Παρόμοια προβλήματα αντιμετωπίζουν κι οι μαθητές μας.

Ενδιαφέρον παρουσιάζει και η (υπόθεση) της **γενετικής ανακεφαλαιώσεως ,** όπου σύμφωνα με αυτήν, κάθε είδος κατά την φάση σύλληψης κυοφορίας και γεννήσεώς του, επαναλαμβάνει σύντομα την ιστορία της βιολογικής του εξέλιξης ως είδους.
Μια ασθενής αναλογία στην διδακτική , υποδεικνύει ότι η ιστορική εξέλιξη ενός αντικειμένου δείχνει τα στάδια από τα οποία πρέπει να περάσει η εκπαίδευση του ανθρώπου[8]

3. Επομένως πώς πρέπει να αντιμετωπιστεί το άπειρο διδακτικά;

Από την ύπαρξη και μόνο των παραπάνω παραδόξων είναι προφανές ότι η έννοια του απείρου είναι πάρα πολύ λεπτή , οδηγεί σε παράξοξα και έχει προβληματίσει τα μάλα την μαθηματική κοινότητα. Επομένως το εύλογο ερώτημα είναι αν και κατά πόσον μπορούν οι μαθητές να διαπραγματεύονται έννοιες του συνεχούς

[8] κατά την γνώμη του γράφοντος, σύμφωνα με αυτή την θεώρηση, η έννοια του αρρήτου αριθμού ως πολύ προγενέστερη της έννοιας του μηδενός ως συμβόλου κι αριθμού (τουλάχιστον 600 χρόνια διαφορά έχει η εμφάνιση της έννοιας του άρρητου στους Πυθαγόρειους και του συμβόλου του αριθμού 0 , τον 3^{o} περίπου αιώνα μ.Χ.

του απειροστού και του απείρου . Ποίος είναι άραγε ο τρόπος εισαγωγής και εξοικείωσης με αυτές τις έννοιες;

Η απάντηση στα παραπάνω είναι ότι το άπειρο αντιμετωπίζεται με την κατάδειξη των ιδιαιτεροτήτων του , των αδυναμιών του , των ίδιων του των «παροδόξων». Είναι μια καθημερινή έννοια στα μαθηματικά , έστω και κρυμμένη . Οι δυσκολίες του συνεχούς δεν θα πρέπει να αποτελέσουν το άλλοθι για την επικράτηση των «διακριτών μαθηματικών» και για τον παραγκωνισμό των «εψιλον-δέλτα» ορισμών της ανάλυσης [9] Είναι θέμα σωστής θεμελίωσης και συνακόλουθα σωστής διδακτικής προσέγγισης.

3.1 . Που και πως εμφανίζεται καθημερινά το άπειρο στην καθημερινή διδακτική πράξη;

- Έχομε μια ευθεία . Άρα έχουμε κάθε απόσταση μεταξύ δύο σημείων, είτε μικρή είτε μεγάλη. Όλα τα δυνατά μήκη υπάρχουν κι είναι άπειρα.
- Υπάρχουν άπειρα , τρίγωνα, τετράγωνα , κύκλοι σφαίρες και κάθε γεωμετρικό σχήμα.
- Το Πυθαγόρειο Θεώρημα νοείται **για κάθε** ορθογώνιο τρίγωνο άρα για **άπειρα** ορθογώνια τρίγωνα και είναι δυνατόν να αποδειχθεί ότι ισχύει **για όλα**

[9] Υπάρχει μια τρόπον τινά «ιδεολογική» φόρτιση και μια -ας την πούμε- «διαμάχη» περί το θέμα των «διακριτών» μαθηματικών ως έτερο πόλο των «συνεχιστικών» . Είναι ένα φαινόμενο που μπορεί να παρατηρηθεί σε διάφορα συνέδρια μαθηματικών . Βεβαίως τα επιχειρήματα είναι παιδαγωγικής φύσεως , ότι δηλαδή τα διακριτά είναι κοντύτερα στην φύση των παιδιών στις γυμνασιακές και λυκειακές ηλικίες κτλ. Βεβαίως και με το ότι καταγράφεται κάποια αντίδραση σημαίνει ότι υπάρχει κάποιο πρόβλημα και κάποια επιχειρηματολογία .Σε κάθε περίπτωση πάντως η ίδια η Ιστορική εξέλιξη ακόμα και στον εικοστό αιώνα της έννοιας του απείρου στα Μαθηματικά ήταν προβληματική , με σκοπέλους , αλλά και γόνιμες καταστάσεις…….

- Το εμβαδόν του κύκλου προσεγγίζεται και τελικά υπολογίζεται με μια διαδικασία όπου άπειρα ισοσκελή τρίγωνα με πλευρές όσο «περίπου» κι οι ακτίνες του κύκλου και η ευθύγραμμη βάση τους ίση «περίπου» με το τόξο στο οποίο βαίνουν!
- Επαγωγικές και άλλες προτάσεις ισχύουν για άπειρο αριθμό περιπτώσεων κτλ.
- Το εμβαδόν των καμπυλογράμμων χωρίων θα ήταν άπιαστο χωρίς την αποφασιστική προσέγγιση μέσω απειροστικών διαδικασιών (Από την εποχή του Αρχιμήδη και με την μέθοδο της εξάντλησης)
- Το μυστήριο με του ασύμμετρους –αρρήτους γίνεται πιο «ζωντανό» όταν πάμε να τους πλησιάσουμε.

Συνηθίζουμε να λέμε:
«Οι παράλληλες ευθείες τέμνονται στο άπειρο»
«ευθεία είναι μια περιφέρεια κύκλου με άπειρη ακτίνα»

Βεβαίως η έννοια της συνέχειας κατάγεται από το άπειρο, μας πάει στην παράγωγο και το ολοκλήρωμα και τελικά σε όλη την Ανάλυση.

Άρα ο εξοβελισμός του απείρου είναι αδύνατος από τα μαθηματικά κι από την διδακτική τους………

3. 2. Από πια ηλικία μπορούν οι μαθητές να κατανοούν έννοιες με πολύ μεγάλους αριθμούς ή το άπειρο;

Ενδιαφέρον έχει μια συζήτηση μεταξύ τωνJean Piaget , P. Joylien και F. Halbwachs[10] σχετικά με τις ηλικίες των παιδιών, τα

[10] F. Halbwachs , καθηγητής στο Παν. Της Provence , P. Joulien Διευθυντής στο Ινστιτούτο I.R.E.M. της Grenoble . Η συζήτηση με τον Piaget, έγινε μετά από αίτημα

μεγέθη των αριθμών που μπορούν να χειριστούν και την έννοια του απείρου.

……………………………………………………………………………..

P. Joulien: Υπάρχει ένα πολύ σοβαρό πρόβλημα στην διδασκαλία των μαθηματικών , το πρόβλημα της διδασκαλίας της Αναλύσεως , δηλαδή της μεθοδικής εξαγωγής όλων των στοιχείων που μπορούν να προέλθουν από το άπειρο. Δεν καταπιανόμαστε με αυτά τα πράγματα αρκετά νωρίς;

Piaget: Ναι.

P. Joulien: Μήπως έχετε συγκεκριμένες απόψεις πάνω σε αυτό το σημείο;

Piaget: Δεν έχω μελετήσει αυτό το ζήτημα. Για το άπειρο έχουμε κάνει μια μικρή έρευνα μαζί με τον Barbel Inhelder , η οποία συνίστατο στο να ρωτήσουμε πόσα σημεία μπορούμε να τοποθετήσουμε ανάμεσα σε δύο ορισμένα σημεία. Ήταν πολύ αστείο αυτό που πραγματοποιείτο πάνω σ΄ αυτό το ερώτημα ως γενετική πρόοδος με την πάροδο της ηλικίας. …Τα μικρά παιδιά , έλεγαν ότι μπορούμε να τοποθετήσουμε 10 σημεία , κι όχι περισσότερα.Τα μεγαλύτερα περνούσαν στα 30 σημεία και αργότερα στα 100 και μόνο στην ηλικία των 11-12 ετών άρχιζαν να λενε «μπορούμε να τοποθετήσουμε όσα θέλουμε»

Σ΄αυτό το επίπεδο λοιπόν βρίσκαμε διασκεδαστικά πράγματα αναφορικά με την έννοια του απείρου

Να ένα παράδειγμα:

Κάναμε ένα πείραμα που συνίστατο στο να προσπαθούμε να προσδιορίσουμε και να χαράξουμε πάνω σε ένα αντικείμενο (π.χ. πάνω σε ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο) τη γραμμή , πέρα

της Γαλλικής εταιρείας Ερευνών σε θέματα διδακτικής (A.F. C. E. D.) το 1976 στο περιοδικό «Renue Francaise de Pedagogie» No 37 Οκτώβριος Νοέμβριος

από την οποία το αντικείμενο αυτό θα έπεφτε, γιατί δεν θα μπορούσε να στηριχθεί και να κρατηθεί , δηλαδή να βρούμε και να χαράξουμε την γραμμή ισορροπίας του. Και να ακριβώς το ερώτημα:

«Σε ένα ορθογώνιο πόσες τέτοιες γραμμές μπορούν να βρεθούν;' Απάντηση: «4» Αντίθετα σε ένα κύκλο οι γραμμές ισορροπίας θεωρούντο άπειρες.

Τότε λοιπόν, ξαναπαίρναμε το ορθογώνιο και λέγαμε; «το ποθέτησέ το όπως θέλεις' τη στιγμή όμως που το παιδί πήγαινε να γυρίσει το ορθογώνιο, διεπίστωνε ότι η ισορροπία μπορούσε να διατηρηθεί και σε άλλη θέση και και έλεγε αυθόρμητα: « Α! μπορώ να το γυρίσω; τότε είναι το ίδιο πράγμα κι εδώ . Ο αριθμός των θέσεων ισορροπίας είναι άπειρος!» Αυτό όμως συνέβαινε από την ηλικία των 11-12 ετών και μετά.

P. Joulien: δεν γνωρίζετε άλλα πρόσωπα που έκαναν έρευνες πάνω στο άπειρο;

Piaget: Τον Carreras που έκανε έρευνα πάνω στο απειροστημόριο[11]

F. Halbwachs: το άπειρα μικρό είναι από αυτή την άποψη πολύ περισσότερο κατάλληλο . Η Ανάλυση εισάγει πρώτα απ΄ όλα το άπειρα μικρό και υπάρχει παραδείγματος χάριν η έννοια του "τείνειν προς…" η οποία είναι βέβαιο ότι εισάγει την έννοια του άπειρα μικρού με ένα πολύ πιο οικονομικό τρόπο , απ΄ όσο εισάγει την έννοια του άπειρα μεγάλου, (Μόνο που δεν ξέρω αν απλοποιεί ή , αντίθετα, πολυπλοκοποιεί την ΄'έννοια)

Πάντως το άπειρα μεγάλο και το άπειρα μικρό δεν μου φαίνονται καθόλου ισοδύναμα από ψυχολογικής απόψεως.

Δεκέμβριος 1976 και παρουσιάζεται σε απόδοση του Νικολάου Ράπτη

Piaget: Όχι καθόλου

F. Halbwachs: Μπορεί κανείς όμως να ξεπεράσει το "όσο μικρό θελήσουμε" όταν πει " τείνει προς…."

P. Joulien: Για μένα αν θέλεις το άπειρο είναι το "άπειρο της επαναλήψεως" Δηλαδή για το άπειρα μεγάλο εσύ μεν σκέφτεσαι τους διαδοχικούς ακεραίους αριθμούς, εγώ Δε σκέφτομαι τις πράξεις που επαναλαμβάνονται άπειρες φορές. Έτσι στο άπειρα μικρό, το να τείνουμε προς το μηδέν , είναι σαν να πλησιάζουμε κάθε φορά κατά το ήμισυ προς το τέλος. Δεν υπάρχουν δηλαδή τελικά τόσο μεγάλες διαφορές, διότι το "τείνειν προς…." Αποτελεί σε τελευταία ανάλυση την πραγματοποίηση μιας απειρίας , πράξεων ,έστω κι αν με τις απειράριθμες αυτές πράξεις, γίνονται πολύ μικρά βήματα

F. Halbwachs: Δεν είμαι βέβαιος ότι τα παιδιά δεν βρίσκουν αμέσως ότι δεν υπάρχει κάτι , ότι υπάρχει κάτι παράδοξο στην ιστορία του Αχιλλέα και της χελώνας . Για παράδειγμα: Η ιδέα ότι ο Αχιλλέας "θα τείνει να φθάσει" , είναι η πρώτη τους απάντηση. Η ιδέα ότι η ενέργεια του Αχιλλέα θα είναι επαναληπτική, δηλαδή ότι η απόσταση που χωρίζει τον Αχιλλέα και την χελώνα μειώνεται διαδοχικά από το 1/10 στο 1/100 , στο 1/1000 κτλ.[12] Ως το άπειρο , είναι εκείνη που κάνει να φαίνεται η χελώνα άφθαστη.

Επομένως πρόκειται για δύο τρόπους τοποθετήσεως του ιδίου προβλήματος που είναι εντελώς διαφορετικοί μεταξύ τους: Ένας που είναι σχετικός προς την ευθυκρισία της κοινής λογικής και λέγει ότι ο γρήγορος Αχιλλέας θα φθάσει την αργοκίνητη χελώνα , γιατί "τείνει προς αυτή" και την ξεπερνάει πολύ σε ταχύτητα, και ο

---

[11] Εδώ η απόδοση στην μετάφραση του κ. Ράπτη είναι ακριβώς «απειροστημόριο» και προφανώς εννοείται το «απειροστό»

άλλος που κάνει να παρεμβαίνει ο επαναληπτικός αλγόριθμος και που καταλήγει σε αυτό το απειροστικό αριθμητικό παράδοξο, το οποίο οδηγεί στο παράξενο συμπέρασμα ότι ο γοργοπόδαρος Αχιλλέας δεν θα μπορέσει να φθάσει ποτέ την αργοκίνητη χελώνα.
P. Joulien: Το παιδί αρνείται το παράδοξο . Από την στιγμή που ξέρει ότι στην πραγματικότητα ο Αχιλλέας θα φθάσει και θα ξεπεράσει την χελώνα, το παιδί αρνείται να συζητήσει και να μπει σε άλλο σχήμα σκέψης.
F. Halbwachs: Αυτό όμως θέλει να πει , ότι πρόκειται για ένα άλλο επαναληπτικό σχήμα , που δεν βρίσκεται στο ίδιο επίπεδο με το σχήμα “τείνει προς…” , ότι τα δύο σχήματα , δεν έχουν την ίδια οργανική συγκρότηση . Ποία είναι η δική σας γνώμη σ΄αυτό;
Piaget: Πράγματι, αυτό σκέφτομαι κι εγώ….

....

3.3 Ο λειτουργικός ρόλος του προβλήματος στα μαθηματικά , κατά Polya[13]

Ο Polya είναι ο πρώτος που διετύπωσε τις ευρετικές μεθόδους στην διδασκαλία (πρόβλημα-λύση-problem solving) . Ο όρος ευρετική που εισήγαγε, σημαίνει μια γενική υπόδειξη που βοηθά αυτόν που λύνει ένα πρόβλημα, να το κατανοήσει , να συλλάβει την λύση του και στην συνέχεια να το λύσει.
Στον Polya, ξεχωριστή θέση κατέχουν τρία αξιώματα:

[12] Προφανώς στην διατύπωση του παραδόξου του Ζήνωνα που έχει στο μυαλό του ο F. Halbwachs: είναι η υπόθεση ότι ο Αχχιλέας έχει δεκαπλάσια ταχύτητα από την χελώνα .
[13] Το μνηνειώδες έργο του Polya, «Πώς να το λύσω» , αν και χρονολογικά παλαιό , διατηρεί πάρα πολλά από τις καινοτόμες ιδέες της εποχής του και σήμερα.

- Για την μάθηση, η κατάλληλη μορφή διδασκαλίας, είναι η επανανακάλυψη, βασισμένη στον Σωκρατικό διάλογο – ενεργητική μάθηση.
- η διαδικασία μάθησης περιέχει επιθυμητό κίνητρο. Ο δάσκαλος πρέπει να παρέχει την νέα ύλη με ενδιαφέρον κι ευχαρίστηση.
- Τα διαδοχικά στάδια στην μάθηση, πρέπει να είναι η εξερεύνηση, η διατύπωση, και η αφομοίωση.

3.4. Οι τρεις τύποι προβλήματος κατά Polya

Ο Hatfield το 1978, στηριζόμενος στην θεωρία του Polya, διέκρινε τρεις τύπους διδασκαλίας που αναφέρονται στην διαδικασία «Πρόβλημα-Λύση προβλήματος» :

- **Στη διδασκαλία ΓΙΑ το Π-Λ** Στον τύπο αυτό δίνουν έμφαση τα σχολικά βιβλία, θέτουν στόχο να αποκτήσει ο μαθητής τις κατάλληλες δεξιότητες και γενικές γνώσεις που είναι απαραίτητες για την λύση των προβλημάτων.
- **Στη διδασκαλία ΓΥΡΩ από το Π-Λ** : Στον τύπο αυτό , ο δάσκαλος πρέπει να δώσει τα σωστά μοντέλα συμπεριφοράς που θα οδηγήσουν στην ορθή πορεία για την λύση του προβλήματος.
- **Στην διδασκαλία ΜΕΣΑ από το το Π-Λ.** Αυτός είναι ο τύπος που ενθαρρύνει ο Polya . Σύμφωνα με αυτόν, ολόκληρη η

παρουσίαση των μαθηματικών γίνεται μόνο μέσα από διαδικασίες επίλυσης προβλήματος , με κατάλληλα επιλεγμένα παραδείγματα και έτσι μυούνται ο ιμαθητές στην διαδικασία επίλυσης προβλήματος .

με αυτές τις απόψεις του Polya τέθηκαν οι βάσεις για την συνέχιση της έρευνας σε αυτό που αποκαλείται « διαδικασία επίλυσης προβλήματος» (**Problem solving**)

4. Ερώτημα :

Πώς μπορεί να διδαχθεί το ότι το σύνολο (α , β) δεν έχει μέγιστο ούτε ελάχιστο [14]στοιχείο ;

Απάντηση:

Προτείνεται η εισαγωγή της διδασκαλίας του με διαδικασία επίλυσης προβλήματος στην Α΄Λυκείου στην ενότητα των ανισώσεων .

4.1. Το πρόβλημα για την εισαγωγή:

Σε ένα απλό φύλλο εργασίας δίνεται το πρόβλημα , ενώ ορίζονται ομάδες των τεσσάρων μαθητών (Ανά δύο θρανία)

Διατύπωση του προβλήματος:

« Ο εκκεντρικός βασιλιάς της Ζουαζηλάνδης , έκανε την εξής βαρυσήμαντη δήλωση:
-Χαρίζω το βασίλειό μου σε όποιον κατορθώσει και μου δώσει την πιο μεγάλη χρηματική ή άλλη αξία, που όμως να είναι μικρότερη από 2 ευρώ!……..
Εσείς τι λέτε ; Κινδυνεύει να χάσει το βασίλειό του;»

Πιθανό σενάριο του μαθήματος:

(i) Οι μαθητές αφήνονται να δουλέψουν και να αναπτύξουν εικασίες ή και ολοκληρωμένες απαντήσεις για το πρόβλημα για 5 λεπτά . Μετά από τα πέντε λεπτά, καλούνται , η κάθε ομάδα να ανακοινώσει το αποτέλεσμά της.

Οι πιθανές απαντήσεις που μπορούν να δοθούν εδώ μπορούν να εκπλήξουν τον διδάσκοντα , ο οποίος καλείται να τις χειριστεί και να τις κατευθύνει «υπογείως» και αφανώς προς την κατεύθυνση που έχει προσχεδιάσει:

Έτσι οι πιθανές απαντήσεις που μπορούν να εισπραχθούν εις επήκοον της τάξης είναι οι εξής:

1) 1,99 ευρώ , διότι δεν υπάρχει διαίρεση του ευρώ μικρότερη από 1 λεπτό (cent) (!)
2) 1 , και ακολουθούν ένα δισεκατομμύριο εννιάρια!
3) 1, 9999999999999999999……….. επ΄άπειρον!

Μόλις κάποιες από αυτές τις πιθανές απαντήσεις ανακοινωθούν στην τάξη, υποβάλλονται στην βάσανο της

δημόσιας κριτικής. Αν κάποια από αυτές τις απαντήσεις δεν προκύψει από την εργασία των ομάδων μπορεί να την αναδείξει ο διδάσκων τεχνηέντως.

Για παράδειγμα:

Αν δεν προκύψει η πιθανή απάντηση 3 , μπορεί να παρέμβει ο διδάσκων και να πει στην ομάδα που έχει πει το 1 ακολουθούμενο από ένα δισεκατομμύριο εννιάρια , «Εγώ λέω ΔΥΟ δισεκατομμύρια εννιάρια!….Μπορείτε να βρείτε κάτι παραπάνω;….»

Κάποιο τότε θα πουν ΤΡΙΑ δις , κάποιοι ΤΕΣΣΕΡΑ και βέβαια είναι σίγουρο ότι η απάντηση «το 1 με άπειρα εννιάρια» θα προκύψει αμέσως…….

ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: « Ξέρει κάποιος πόσο κάνει πραγματικά ο αριθμός 1, 999999999999…………….με άπειρα εννιάρια; Αν θυμάμαι καλά (σ.σ. γνωρίζει καλώς!) το έχετε διδαχθεί στην Β΄Γυμνασίου! Είναι ένας δεκαδικός περιοδικός …..Σας λέει τίποτα;

Εδώ , μάλλον δεν θα λάβει καμία απάντηση ο διδάσκων[15] (πλην εξαιρετικής εκτάκτου περιπτώσεως μαθητή) και θα υποχρεωθεί να κάνει το «πείραμα» στον πίνακα.

ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: « Να τον βαπτίσουμε χ…..»

Χ=1,9999999999999999999999999……………………

Ποιος είναι ο 10χ;

Εδώ περιμένει απάντηση που κατά 99% θα λάβει. Αν καθυστερήσει η απάντηση πέραν από κάποιο εύλογο χρονικό

[15] δυστυχώς αυτό είναι ένα εμπειρικό δεδομένο το οποίο εύκολα μπορεί να επικυρωθεί με μια απλή έρευνα, παρ΄ότι μπορεί να θεωρείται ως γνωστό από το αναλυτικό πρόγραμμα από την Β΄γυμνασίου.

διάστημα μπορεί να την εκμαιεύσει με την φράση: «θυμηθείτε πώς πολλαπλασιάζομε έναν αριθμό με 10, 100 , 1000 κτλ…..»
Μετά την σωστή απάντηση , φτιάχνει το σχήμα:

10χ = 19,9999999999999999999999999999…………….

\- χ= 1,9999999999999999999999999999……………

9χ= 18,0000000000000000000000000000……………

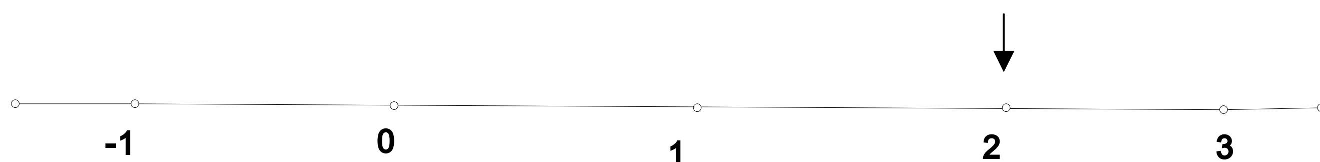
$\Rightarrow 9\chi=18$

$$\Rightarrow \frac{9x}{9}=\frac{18}{9}$$

$$\Rightarrow x=2$$ (!)

Αλλά από την εκφώνηση ο βασιλιάς έχει αποκλείσει το 2 !
…Άρα δεν έχασε ακόμη το βασίλειό του!………

Εδώ καλούνται οι μαθητές να παρατηρήσουν τι τους κάνει εντύπωση στο αποτέλεσμα. Η προσδοκώμενη απάντηση είναι ότι το αποτέλεσμα δεν είναι ΠΕΡΙΠΟΥ 2 , αλλά ΑΚΡΙΒΩΣ 2!



ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: “Δεν εξηγήσαμε όμως γιατί η απάντηση 1,99 ευρώ δεν είναι παραδεκτή……έχετε κάποιο επιχείρημα ή όχι;»
Αν δεν πάρει κάποια απάντηση (απίθανο αυτό) συνεχίζει:
Τι λέει η εκφώνηση; ……………………………………………

Χρηματική ή ΑΛΛΗ[16] αξία; Έχετε κάποια ιδέα για το τι μπορεί να σημαίνει αυτό;
ΟΜΑΔΕΣ : «Μπορεί να πληρωθεί και είδος κύριε!»
ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: « Και ένα είδος μπορεί να έχει αξία όσο θέλουμε πριν από το 2 . Ο Βασιλιάς να ήξερε την λύση και να έβαλε το στοίχημα εκ του ασφαλούς ότι δεν χάνει ποτέ; Αφού αποκλείσαμε το 1 με τα άπειρα εννιάρια πόσα εννιάρια να βάλω εσείς τι λέτε;»
Εδώ αναμένεται να προκληθεί αναστάτωση, καθώς θα πέφτουν νούμερα και αλληλοσυγκρουόμενες απαντήσεις για το πόσα εννιάρια μπορούμε να βάλουμε μετά το 1 ……..[17]
ΟΜΑΔΑ: « Αξία, όση το 1 , ακολουθούμενο από όσα εννιάρια μπορούμε να γράψουμε από την Γη μέχρι τον ήλιο!
ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ : «συμφωνείτε;»
ΟΜΑΔΕΣ: «Εμείς τόσα κι άλλα τόσα εννιάρια!»
ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: «Όσα είπατε όλοι , κι ένα εννιάρι ακόμη δίνω εγώ ! Είναι δικό μου το βασίλειο;»
ΟΜΑΔΕΣ: « Κι άλλα τόσα εμείς παραπάνω!»
ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: « Και που θα πάει κύριοι αυτή η βαλίτσα; ΄Οσα και να δώσει κάποιος, κάποιος άλλος μπορεί να δώσει ένα παραπάνω ! Τι κάνουμε; Μπορούμε να βρούμε τέτοιον αριθμό αμέσως πριν τον 2 ;»……………………………………………………….
ΟΜΑΔΕΣ: « Δεν υπάρχει κύριε τέτοιος αριθμός!»
ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: «Δεν υπάρχει; Και επειδή δεν μπορούμε να τον βρούμε πάει να πει ότι ΔΕΝ ΥΠΑΡΧΕΙ;[18] ……Μπορεί να υπάρχει και εμείς να είμαστε ανίκανοι να τον βρούμε!……Το ότι δεν

---

[16] Μια ευρετική νύξη
[17] υπάρχει μια πολλαπλά πρότερη εμπειρία εφαρμογής σε τάξεις αυτής της διδακτικής κατάστασης και μας επιτρέπει να να μην διατυπώσουμε απλώς εικασία για την προσδοκώμενη αντίδραση των μαθητών
[18] αφήνεται εύλογος χρόνος για σύσκεψη , συνεργασία των ομάδων πάντα πριν ο καθηγητής προβεί σε ευρετικές νύξεις.

μπορούμε να τον βρούμε δεν σημαίνει κι ότι δεν υπάρχει!……..Χρειάζεται να το αποδείξουμε!……… Μπορείτε να το αποδείξετε με την μέθοδο της εις άτοπον απαγωγής στην οποία έχουμε αναφερθεί στην Γεωμετρία ………Να υποθέσουμε τάχα ότι υπάρχει ο πιο μεγάλος αριθμός ΠΡΙΝ το 2 και να καταλήξουμε σε άτοπο!…..Θυμηθείτε και την άσκηση που λύσαμε χθες! [19]

(Αν α<β , τότε α< $\frac{a + \beta}{2}$ <β)

Υποθέστε ότι ο ΠΙΟ ΜΕΓΑΛΟΣ ΠΡΙΝ ΤΟ 2 υπάρχει κι είναι ο α ! Δηλαδή το α<2 και το πιο μεγάλο που υπάρχει πριν το 2 !

Δουλεύουμε στις ομάδες μας………………………………

Μετά την ανακάλυψη της απόδειξης και του άτοπου, ο καθηγητής θα δώσει έμφαση στην επισήμανση του άτοπου:

> «Υποθέσαμε το α για ΤΟΝ μεγαλύτερο πριν τον 2 και βρήκαμε ΜΕ ΛΟΓΙΚΑ ΒΗΜΑΤΑ έναν ΑΚΟΜΗ μεγαλύτερο, τον $\frac{a + 2}{2}$ Αφού κάναμε λογικά βήματα και καταλήξαμε σε αντιφατικό συμπέρασμα σε σχέση με την υπόθεσή μας , τότε φταίει η υπόθεσή μας! Αυτό είναι το άτοπο! Άρα λανθασμένα υποθέσαμε ότι υπάρχει μεγαλύτερος πριν το 2. Δεν υπάρχει τέτοιος αριθμός λοιπόν !

Και έτσι το ΑΠΟΞΕΙΞΑΜΕ!

---

[19] Πρέπει να έχει προηγηθεί η λύση της άσκησης αυτής στον πίνακα , μέσα στην τάξη, στο προηγούμενο μάθημα και να έχει γίνει επισήμανση στο τι πραγματικά σημαίνει και ποιο είναι το νόημά της. Αυτό μπορεί να επιτευχθεί ,μόνο αν οι μαθητές αντιληφθούν , ότι η πρόταση αυτή «με λόγια» λέει ότι πάντα ανάμεσα σε δύο αριθμούς μπορώ να βρω κάποιον άλλο και στην περίπτωση της άσκησης το μέσο όρο τους. Συνήθως οι μαθητές μένουν στην επιφανειακή αλγεβρική διατύπωση μιας πρότασης και δεν κατανοούν την πληροφορία που κουβαλάει, ακόμα κι αν έχουν κοπιάσει και έχουν κατορθώσει να την λύσουν. Εδώ είναι υποχρέωση του καθηγητή να αναδεικνύει το σημαντική πληροφορία που κουβαλάει μια πρόταση , αλλά και του αναλυτικού προγράμματος που μια τέτοια πρόταση θα έπρεπε-ίσως- να την έχει λ.χ. στις «εφαρμογές» , κι όχι στις ασκήσεις.

Θέλω να συζητήσουμε τώρα , μέχρι να κτυπήσει το κουδούνι , αν πραγματικά πιστεύατε , ότι δεν υπάρχει προηγούμενος αριθμός από τον 2 . Και ακόμη αν μετά από όλα αυτά , ποιος είναι ο πρώτος αριθμός που συναντάμε ΜΕΤΑ τον 2 .[20]

4.2. Η σύγκρουση των γνώσεων μέσα από την επίλυση του συγκεκριμένου προβλήματος

Τονίσαμε και καταδείξαμε στην εισαγωγή , ότι το ίδιο το άπειρο αποτελεί επιστημολογικό εμπόδιο και μάλιστα από τα πλέον σοβαρά. Η διαίσθηση και το ένστικτο , στην περίπτωση του απείρου συχνά δίνουν ισχυρές λανθασμένες εντυπώσεις που καταγράφονται ως εδραία νοητικά σχήματα στο μυαλό των ανθρώπων . Η ρήξη πρέπει να γίνει μέσω μιας συγκρουσιακής κατάστασης , η οποία να είναι όσο το δυνατόν πιο έντονη , ώστε μέσα από το σοκ της νέας ανακάλυψης να μπορέσει να υποκαταστήσει το λανθασμένο μοντέλο που έχει δημιουργήσει το παιδί στο μυαλό του.

Εδώ οι πραγματικοί R είναι ένα απολύτως διατεταγμένο σύνολο. Το πρότερο σχήμα των φυσικών N είναι επίσης ένα διατεταγμένο και εκεί κάθε φυσικός έχει επόμενο και προηγούμενο . Είναι “φυσικό” να ισχύει το ίδιο και στο R . Μάλιστα , το ότι η αδυναμία εύκολου προσδιορισμού του «προηγουμένου του 2» κατ΄ουδένα τρόπο δεν οδηγεί σε προφανές συμπέρασμα ότι αυτός ΔΕΝ ΥΠΑΡΧΕΙ! Το ίδιο φυσικά ισχύει και για το Q (πάντα ανάμεσα σε δύο ρητούς υπάρχει κάποιος άλλος ρητός) έτσι λοιπόν , η σύγκρουση θα πρέπει να γίνει με το κατάλληλο μοντέλο

[20] Απόπειρα θεσμοθέτησης της νέας γνώσης. Ίσως το σοβαρότερο κομμάτι της διαδικασίας , αφού ο καθηγητής θα καταλάβει αν πέρασε η νέα γνώση , από την

και κατά τον πλέον «δραματικό» τρόπο. Να ανατραπεί το λανθασμένο μοντέλο και στην θέση του να μπει το νέο ή τροποποιημένο . Βεβαίως , υπάρχει ο κίνδυνος λόγω λανθασμένης εισαγωγής, το νέο μοντέλο να μην ανατρέψει ή παλαιό ή και να ….συγκατοικήσει μ΄αυτό , εφ΄ όσον δεν κατορθωθεί να καταδειχθεί η αντιφατικότητα του παλιού με το νέο , με πειστικό τρόπο.

Ο Bachelard έχει ασχοληθεί με αυτά τα προβλήματα της διδακτικής , υποστηρίζοντας επιγραμματικά ότι «μαθαίνουμε ενάντια μιας παλαιότερης γνώσης»
Συγκεκριμένα,προβληματίσθηκε με τα επιστημολογικά εμπόδια τα οποία θεωρεί ως μια «συντηρητική λειτουργία» του νου στην διαδικασία απόκτησης γνώσης. Στα πλαίσια αυτού του προβληματισμού , αντιπαραθέτει τις έννοιες «συντηρητικό ένστικτο» και «επιμορφωτικό ένστικτο» . Συγκεκριμένα, υποστηρίζει, ότι το συντηρητικό ένστικτο ανατρέχει σε οικείες απαντήσεις, υποστηρίζει την ήδη υπάρχουσα τάξη, στηρίζεται σε εμπειρικές γνώσεις που (στο διάβα του χρόνου) έχουν αποδειχθεί αποτελεσματικές , καλλιεργεί συνήθειες και υποστηρίζει προκαταλήψεις. Η συνήθεια είναι από τα κυριότερα εμπόδια στην επιστημονική πρόοδο.[21]

Αντίθετα , το επιμορφωτικό ένστικτο, δίνει αξία στις ερωτήσεις, επιμένει στην επανεξέταση των καταστάσεων, στηρίζεται στην έρευνα και διερωτάται ακόμη και στην πλέον στοιχειώδη γνώση.[22]

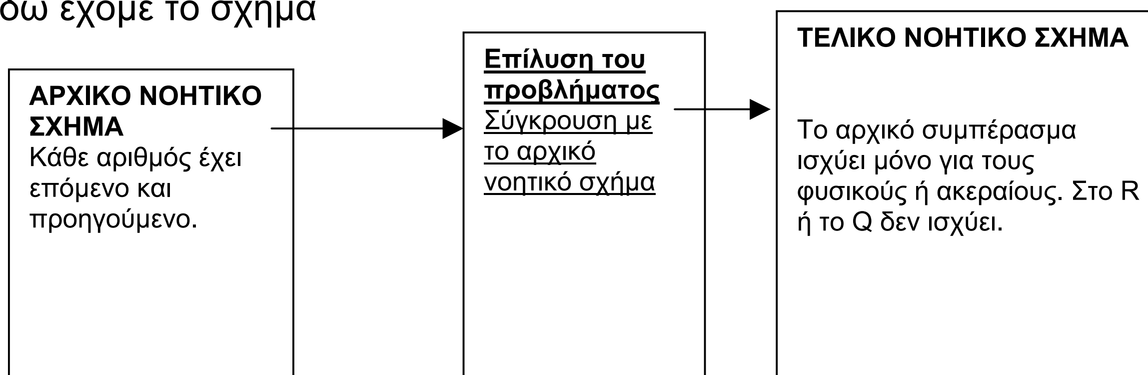
συζήτηση που θα ακολουθήσει.

[21] Να προσθέσουμε στον ισχυρισμό του Bachelard ότι αυτό κατά μείζονα λόγο αυτό ισχύει και στην διδακτική , η οποία βλέπεται και από την σκοπιά της κατακτημένης τέχνης από τους –ιδίως μεγαλύτερους ηλικιακά – διδάσκοντες , πράγμα που δεν ευννοεί τους νέους πειραματισμούς και άρα τα νέα αποτελεσματικότερα ίσως μέσα στην προσέγγιση της διαδικασίας απόκτησης γνώσης.

[22] «Γνωσιολογική και διδακτική προσέγγιση των στοιχειωδών μαθηματικών εννοιών» σελ. 57

Ο J. Piaget χρησιμοποιεί τον όρο «αφομοίωση» (assimilation) για να περιγράψει την διαδικασία ενσωμάτωσης των νέων δεδομένων στις ήδη υπάρχουσες δομές γνώσης και στον όρο «συμμόρφωση» (accommodation) όταν αναφέρεται στην διαδικασία τροποποίησης των γνωστικών δομών του ανθρώπου. Θεωρεί μάλιστα την τροποποίηση και την συμμόρφωση ως συμπληρωματικές διαδικασίες.[23]

Εδώ έχομε το σχήμα



4.3. Οι διδακτικές καταστάσεις που δημιουργούνται από την διαδικασία επίλυσης του συγκεκριμένουπροβλήματος

Κατά την διαδικασία μάθησης ενός μαθηματικού αντικειμένου, υπάρχουν σύμφωνα με τον Brousseau (1986) τέσσερις διαφορετικές καταστάσεις[24]. Κατά την διάρκειά τους, η γνώση που παράγεται ή χρησιμοποιείται , δεν έχει την ίδια λειτουργία. Λόγου χάριν, μπορεί να εμφανισθεί ως απλή άποψη ή τεκμηριωμένο επιχείρημα. Η γνωστική εξέλιξη κατά την διάρκεια

[23] «Γνωσιολογική και διδακτική προσέγγιση των στοιχειωδών μαθηματικών εννοιών» σελ. 30

[24] «Γνωσιολογική και διδακτική προσέγγιση των στοιχειωδών μαθηματικών εννοιών» σελ.49

των φάσεων μιας διδακτικής κατάστασης επιτυγχάνεται , μέσα από διαδικασίες αντιπαραθέσεων, επικυρώσεων, ή ανασκευών. Συγκεκριμένα έχομε :

- καταστάσεις δράσης , όπου ο μαθητής , με αφορμή μια ενέργεια που πραγματοποιεί, έχει την ευκαιρία να εκφράσει κάποιες απόψεις που αφορούν μαθηματικές ιδιότητες , έννοιες και διαδικασίες που αντικατοπτρίζουν το επίπεδο των γνώσεών του.

Στο συγκεκριμένο πρόβλημά μας, η πρώτη αυτή κατάσταση εμφανίζεται μέσα από την συμμετοχή του μαθητή στην ομάδα που του δίνει το έναυσμα να εκφράσει εικασίες ή και απαντήσεις σχετικά με το μεγαλύτερο ποσό ευρώ που δεν φθάνει όμως τα 2 ευρώ. Καλείται να γράψει την (μη προφανή) απάντηση, η οποία στο πρόβλημα διατυπώνεται με ανοικτό τρόπο[25]

- καταστάσεις διατύπωσης . Σύμφωνα με αυτές, οι γνώσεις που εφαρμόστηκαν στην προηγούμενη φάση της δράσης, καθίστανται αντικείμενο διαπραγμάτευσης της ομάδας μέσα από μια όσο το δυνατόν λεκτική διατύπωση. Αν η διατύπωση δεν επιτρέπει την μετάδοση του επιθυμητού μηνύματος, τότε επανεξετάζεται , όχι μόνο η ίδια η διατύπωση, αλλά και η υποκείμενη γνώση.

[25] Τα προβλήματα κατατάσσονται σε κατηγορίες ανάλογα με την αρχική κατάσταση διατύπωσης, σε ανοικτής και κλειστής διατύπωσης και σε σχέση με τον τελικό στόχο , αν είναι ανοικτού στόχου ή κλειστού με την έννοια της σαφούς ή όχι διατύπωσης . Έτσι έχουμε τα προβλήματα τύπου (Κ, Κ) δηλ. κλειστής διατύπωσης και κλειστού στόχου («παραδοσιακά») (Κ,Α) , (Α,Κ) , (Α,Α) Η τελευταία κατηγορία είναι αυτό που λέγεται ανοικτό πρόβλημα και παρουσιάζει ενδιαφέρον ως το μέσον που θα διδάξει την «θεωρία» στους μαθητές μέσω των καταστάσεων και διαδικασιών επίλυσής του. Το συγκεκριμένο πρόβλημα που έχουμε παρουσιάσει , είναι ανοικτής διατύπωσης και κλειστού στόχου. Αν για παράδειγμα δεν υπήρχε στην εκφώνηση η φράση « ή άλλη αξία» θα το καθιστούσε ανοικτότερο καθώς η πιθανή απάντηση 1,99 ευρώ θα έπρεπε να γίνει αποδεκτή ως μία λύση. Το να καταστεί όμως ένα πρόβλημα περισσότερο ανοικτό ή κλειστό , έχει να κάνει με τους στόχους που έχει θέσει ο διδάσκων, τον χρόνο που έχει στην διάθεσή του κτλ.

Στο πρόβλημά μας, μέσω των ομάδων, μπορεί να γίνει και μια επεξεργασία του μη προφανούς αποτελέσματος ότι 1,9999….=2

Μπορούν οι ομάδες να διατυπώσουν και την γενικότερη πρόταση , πως κάθε περιοδικός είναι ρητός , όπως και την διαδικασία της (αυτόματης) μετατροπής δεκαδικού τερματιζόμενου σε ρητό ή της αλγοριθμικής διαδικασίας για την μετατροπή δεκαδικού τερματιζόμενου σε ρητό. [26]

- καταστάσεις επικύρωσης

Σύμφωνα με αυτές οι υποθέσεις και οι εικασίες, δίνουν την θέση τους στην επιχειρηματολογία . οι καταστάσεις επικύρωσης , απαιτούν ένα ορισμένο επίπεδο βεβαιότητας , χωρίς ωστόσο να είναι απαραίτητες οι αυστηρές αποδείξεις.

---

[26] Στο πρόβλημα όμως την υπενθύμιση της απόδειξης ότι 1,99999….=2 την κάνει ο εκπαιδευτικός στην δυστυχώς εξαιρετικά πιθανή περίπτωση να μην την γνωρίζει κανείς μαθητής , παρ΄ότι έχει αυτή διδαχθεί στην Β΄Γυμνασίου.
Αυτό το πρόβλημα ίσως θα μπορούσε να ειδωθεί συνολικά και στην Β' Γυμνασίου να δοθούν στην οικεία υπάρχουσα παράγραφο, καταγραφές άμεσων απορορροιών από την ύλη που διδάσκεται εκεί και για τις οποίες δεν γίνεται καμία νύξη.
Συγκεκριμένα, πρέπει να επισημανθεί ότι λ.χ.
1,5=1,500000000………=1,499999999999……….
Και επίσης να δει το παιδί το αποτέλεσμα και με την οπτική του ότι

$$1+\frac{4}{10}+\frac{9}{10^{2}}+\frac{9}{10^{3}}+\frac{9}{10^{4}}+\ldots\ldots\ldots=1,5$$

ουσιαστικά έχει κάνει μια κατάκτηση γνώσης (Έχει αθροίσει την σειρά!) με μια απλή διαδικασία επίλυσης πρωτοβάθμιας εξίσωσης.
Για όλα τα προηγούμενα όμως δεν έχουμε καμία νύξη στο διδακτικό βιβλίο. Μπορεί να έχει κριθεί ότι δεν το επιτρέπει η –ίσως- η πνευματική ωριμότητα των μαθητών (βεβαίως μπορεί να υπάρχει κι ο λόγος της ποσότητας ύλης ή άλλος) αλλά κατά την γνώμη του γράφοντος ο κάθε μικρός μαθητής της Β΄γυμνασίου , μπορεί να κατακτήσει το άθροισμα των απείρων όρων γεωμετρικής προόδου με λόγο ½ , αν υποθέσουμε ότι το θρανίο έχει μήκος 1 μέτρο και να κλιθεί σε μια δραστηριότητα του τύπου «προχωρώ μέχρι την μέση του μήκους του θρανίου, (με το δάκτυλο) και μετά μέχρι την μέση της μέσης και προσθέτω στο προηγούμενο κ.ο.κ. μέχρι να κάνει «σειμειωτόν» (μπορεί εδώ σκόπιμα ο δάσκαλος να βάλλει και πάνω από 10 βήματα για να δείξει ότι «όσες πράξεις κι αν κάνουμε δεν φθάνουνε το 1 , αλλά το «πλησιάζουμε όσο κοντά θέλουμε» και «με άπειρες πράξεις , αν ήταν δυνατόν να τις κάνουμε, το φθάνουμε»

Στο πρόβλημά μας , αυτό γίνεται με την παρουσίαση των «πορισμάτων» κάθε ομάδας και με την αποδοχή της υπόλοιπης τάξης.

- <u>Καταστάσεις θεσμοθέτησης,</u>

Αποσκοπούν στο να δώσουν τον χαρακτήρα κοινωνικά αναγνωρισμένης γνώσης , σε ορισμένες από τις προσωπικές γνώσεις που χρησιμοποιήθηκαν κατά την διάρκεια των προηγούμενων φάσεων.

Στο πρόβλημά μας, η συζήτηση που γίνεται στο τέλος της διδακτικής ώρας αποσκοπεί και αναδεικνύει, αυτή την διδακτική κατάσταση.

Ο ίδιος ερευνητής, μελέτησε και το λεγόμενο «διδακτικό συμβόλαιο» που πρέπει να τηρούν οι μαθητές ως προς την επίλυση των προβλημάτων και που στην ουσία συνίσταται από ένα σύνολο κανόνων οι οποίοι καθορίζουν τους ρόλους και τις δραστηριότητες όλων όσων συμμετέχουν στην διδακτική πράξη. Συγκεκριμένα, το διδακτικό συμβόλαιο περιλαμβάνει κυρίως κανόνες υπονοούμενους και των οποίων η διδακτική σκοπιμότητα δεν είναι πάντοτε προφανής: Για παράδειγμα:

(ι) ποίο το περιεχόμενο των εννοιών «λύνω» «αποδεικνύω» « επαληθεύω»;

(ιι) Ποίος είναι ο ρόλος των ερωτήσεων « Τι μπορούμε να συμπεράνουμε;» «Τι πρέπει να χρησιμοποιήσουμε;» «Τι παρατηρείτε;» «Είναι αρκετά αυστηρή η απόδειξη;»

(ιιι) Πότε χρησιμοποιούμε εκφράσεις του τύπου «είναι προφανές…»

(ιυ) Τι σημαίνει το μήνυμα που στέλνει στην αρχή κάθε χρονιάς ο καθηγητής λέγοντας « Εγώ θέλω….»

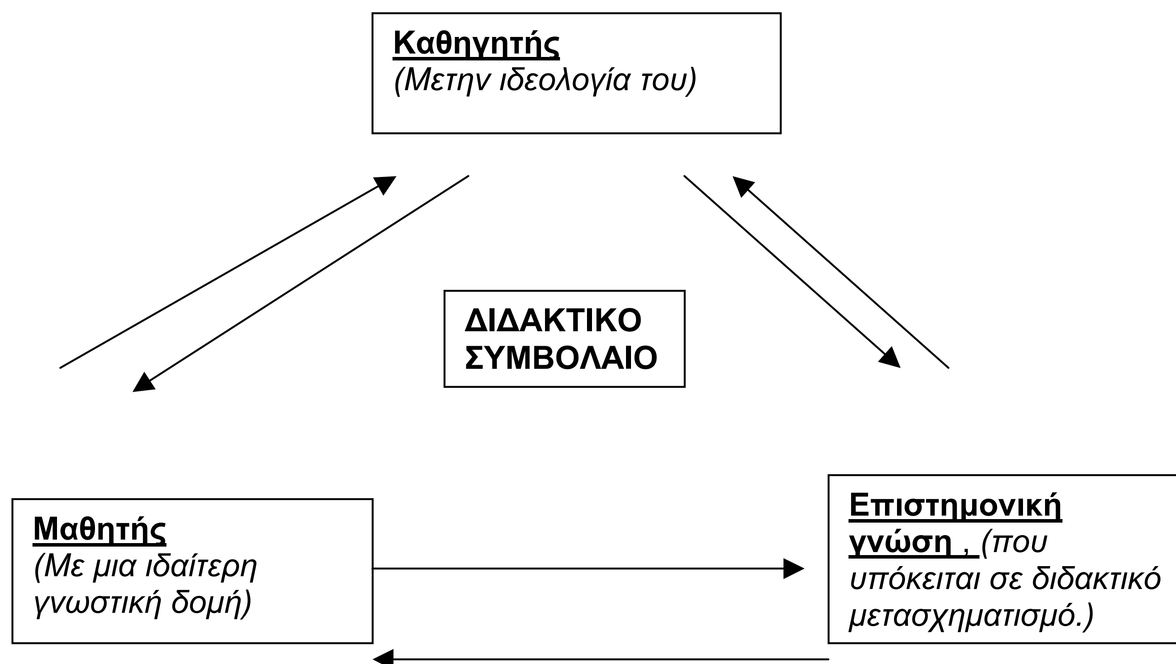
(υ) γιατί ο μαθητής στο άκουσμα «πρόσεχε!» του καθηγητή αντικαθιστά το +17 που έγραφε με το –17 ή το 2χ με το $χ^2$;
(υι) Τί σημαίνουν τα σύμβολα «Ε» «χ» ή «Π» για τους μαθητές;
(υιι) Τι σημαίνει απλοποιώ , υπολογίζω , παραγοντοποιώ; Που τελειώνει και πού αρχίζει μια τέτοια διαδικασία;
(ιιχ) Τι σημαίνει και πως αντιλαμβάνεται την προτροπή του δασκάλου του ένας μαθητής «φτιάξε ένα παρόμοιο πρόβλημα;»
(ιυ) Η γραφική παράσταση που για έναν καθηγητή απλοποιεί ένα πρόβλημα , η ίδια μήπως αποτελεί ένα επιπλέον πρόβλημα για τον μαθητή; το ίδιο είναι για τους μαθητές το «-4» και το « ο αντίθετος του 4;»

Τι γίνεται με το πρόβλημα της ηλικίας του καπετάνιου; [27] Τι γίνεται με τις αντιλήψεις των μαθητών ότι τα μαθηματικά θέλουν απομνημόνευση; Τι κάνομε με την ευρύτατα διαδεδομένη αντίληψη ότι οι ασκήσεις λύνονται ή σε λίγα λεπτά ή καθόλου;[28] Υπάρχουν ασκήσεις στα βιβλία για την λύση των οποίων δεν χρησιμοποιούνται όλα ή ορισμένα από τα δεδομένα τους; Για τι ο δάσκαλος μέσα στα πλαίσια του ατύπου αυτού συμβολαίου

---

[27] Αποτελεί και το «αγαπημένο θέμα» του υποφαινομένου, και το θέτει κάθε χρονιά που τυχαίνει να μπαίνει στην Α΄γυμνασίου. Ειδικά φέτος το έθεσε με μια με μια ουσιαστική –όπως ενόμιζε-πειραματική παραλλαγή: «Το πλοίο έχει 3 μούτσους , 7 ναύτες και 7 επιβάτες. Πόσων χρονών είναι ο καπετάνιος;»
Είχε απορία να δει αν ένας δεκαεπτάχρονος εφάνταζε για καπετάνιος! Και βέβαια η φαντασία είναι δεν μπορεί να έχει όρια! Τα μισά και πλέον πρωτάκια , έκαναν πρώτα έναν πολλαπλασιασμό του 3 με το 7 και στην συνέχεια προσέθεσαν το 7 . ώστε το 28 να φαντάζει ως μια αληθοφανής ηλικία καπετάνιου! Ένας μάλιστα πλειοδότησε λέγοντας 7χ7=49 , 49+3=52 η ηλικία του καπετάνιου.
[28] Ο υποφαινόμενος προβληματίσθηκε αρκετά όταν άκουσε την ίδια φράση από έναν πραγματικά καταξιωμένο συνάδελφο των φροντιστηρίων: «Το λέω και στους μαθητές μου….Μια άσκηση ή που θα αρχίσεις την λύση της σε 10 λεπτά , ή που δεν λύνεται καθόλου , έτσι, ασχοληθείτε με την θεωρία που μπορείτε να την θυμηθείτε!….» προφανώς στα πλαίσια των εξετάσεων με τον περιορισμένο χρόνο , είχε δίκιο, μόνο που το «έθος» των εξετάσεων οι «πρακτικές» πληροφορίες και οι τυφλοσούρτες επηρεάζουν φαίνεται και την διδακτική πρακτική πολύ περισσότερο από όσο είναι εκ πρώτης όψεως προφανές……

προσδιορίζει το τι επιτρέπεται, το τι απαγορεύεται, τι αναμένεται κτλ.;



Στο παραπάνω σχήμα φαίνεται η δομή της έννοιας του διδακτικού Συμβολαίου και η δυναμική της.

Φαίνεται λοιπόν ότι το διδακτικό συμβόλαιο, δεν αφορά μόνο την διδασκαλία, αλλά είναι το χτίσιμο μιας σχέσης όπου φανερά ή σιωπηλά , ο κάθε συντελεστής, ο δάσκαλος και ο μαθητής , έχει την ευθύνη να συνεισφέρει με κάποιους τρόπους ή είναι υπεύθυνος απέναντι στους άλλους.

4.4. Ποιο είναι το «διδακτικό συμβόλαιο» κατά Brousseau για το πρόβλημα;[29]

[29] Ιφ. Νένου : «Το διδακτικό συμβόλαιο και τα προβλήματα» Τετράδια διδακτικής των μαθηματικών., Νο 2 , 1989

1) ένα συνηθισμένο σχολικό πρόβλημα , δέχεται μία και μόνο μία απάντηση.
2) Για να φθάσουμε σε αυτή την απάντηση:

-Όλα τα δεδομένα πρέπει να χρησιμοποιηθούν
-καμία ένδειξη δεν είναι απαραίτητη
-η κατάλληλη χρήση των δεδομένων γίνεται κατά ένα τρόπο που θέτει σε ενέργεια οικείες διαδικασίες, (Αριθμητικές πράξεις, μέθοδος των τριών κτλ.) που πρέπει να συνδυασθούν με τον κατάλληλο τρόπο.

Και βέβαια αυτή η προβληματική έχει να κάνει με την αναγκαιότητα εισαγωγής στην διδακτική πράξη και ανοικτών «μη συνηθισμένων» προβλημάτων.

4.5 . Η ανακαλυπτική μάθηση (discovery learning) του J . Brouner

Βασικά άποψη του Brouner είναι ότι ο δάσκαλος δεν θα πρέπει να παρέχει έτοιμες γνώσεις στους μαθητές, αλλά να δημιουργεί σε αυτούς προβληματικές καταστάσεις , που θα τους ωθούν στην ανακάλυψη της γνώσης. Για να παρακινούνται όμως οι μαθητές προς το πρόβλημα, θα πρέπει να δίνει ο δάσκαλος μορφή ανάλογη προς το πνευματικό τους επίπεδο, και επίσης να τους προδιαθέτει ευνοϊκά προς την νέα μάθηση, δημιουργώντας με ερωτήσεις και νύξεις την απορία την περιέργεια και την αμφιβολία σ΄ αυτούς. Αντί λοιπόν να παράγει ο δάσκαλος μαθητές –κινητές βιβλιοθήκες, χρησιμότερο για τους ίδιους και την κοινωνία θα είναι να συμμετέχουν στην διαδικασία της παραγωγής της γνώσης. Χρησιμοποιώντας δε την διδακτική τεχνική της επαγωγικής σκέψης, παρέχει στους μαθητές του παραδείγματα και

λεπτομέρειες , και τους παρωθεί να ανακαλύψουν τις γενικές αρχές.[30]

4.6. Τα πλεονεκτήματα της εργασίας των μαθητών καθ΄ ομάδες.

Σύμφωνα με τον Piaget, η κάθε γνώση, δεν απορροφείται άμεσα από το υποκείμενο, αλλά οικοδομείται μέσα από ένα πλαίσιο κοινωνικών αλληλεπιδράσεων και στα κάθε είδους ερεθίσματα που δέχονται απ΄ αυτό. Μέσα από την συλλογική εργασία, αναπτύσσεται μια σύνθετη διεργασία σκέψης και πρακτικής που ενδυναμώνει την ατομική και ομαδική τους συνεισφορά.

Τα πλεονεκτήματα είναι :

Ενεργοποιεί τους μαθητές, βγάζοντάς τους από την παθητική στάση ακρόασης. Ωθεί σε αυτενέργεια και πρωτοβουλίες . Διεγείρει προς μια συνεχή πνευματική δραστηριότητα , οξύνει την κριτική σκέψη κι ευστροφία, και καλλιεργεί μια στάση αυτογνωσίας και κριτικής.

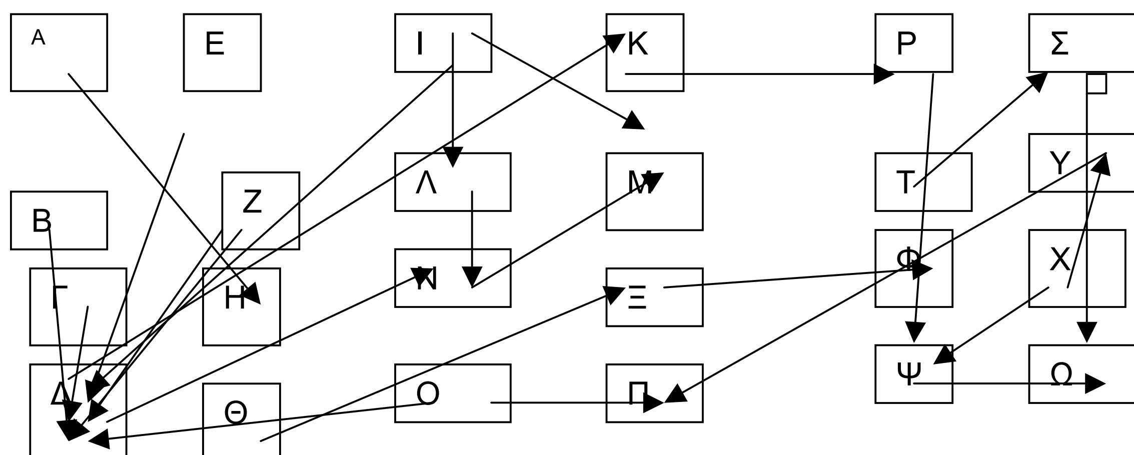
Επίσης , η εργασία καθ΄ ομάδες, περιορίζει ανταγωνιστικές και και εγωϊστικές στάσεις, αναπτύσσει τον αλτρουϊσμό, σφυρηλατεί την αλληλεγγύη , την αλληλοβοήθεια και τον αλληλοσεβασμό. Αναπτύσσει την προσωπική και ομαδική ευθύνη και οπλίζει τους μαθητές με τεχνικές και μεθόδους εργασίας. Ακόμα, οι αδιάφοροι, παρακινούνται στην κοινή προσπάθεια, συνεργάζονται και αυτοβελτιώνονται.

Ο καθορισμός των ομάδων κατά όσον αφορά την αριθμητική και ποιοτική τους σύσταση, είναι μια πολύ λεπτή διαδικασία και σε

[30] Θ. Τριλιανός: «Μεθοδολογία της διδασκαλίας ΙΙ» ΑΘΗΝΑ 1992

κάθε περίπτωση πρέπει να καθοριστεί από την αρχή της χρονιάς και σε συνεννόηση με τους άλλους καθηγητές της τάξης. Κατά όσον αφορά τον αριθμό, το θέμα είναι λυμένο κατά σαφή τρόπο , καθώς από ερευνητές έχει διαπιστωθεί ότι ομάδες 3-5 ατόμων αποτελούν την ιδανική αριθμητική σύσταση. Κατά όσον αφορά την ποιοτική σύσταση θα πρέπει να ληφθούν υπ΄όψιν οι προσωπικές προτιμήσεις των ιδίων των μαθητών (Με διακριτικό όμως τρόπο) και βέβαια η ατομική επίδοση στο των μαθητών. (Επίσης με διακριτικό τρόπο) Ο εκπαιδευτικός , πρέπει να είναι σε θέση να γνωρίζει τις όποιες ιδιαιτερότητες των μαθητών του και βέβαια σε αυτό μπορεί να ζητήσει την αρωγή των άλλων εκπαιδευτικών.

Μια πρώτη πρακτική που προτείνεται να ακολουθείται στην αρχή κάθε χρονιάς, είναι η χωροταξική κατανομή των μαθητών , η οποία προηγείται της κατανομής καθ΄ομάδες. Σύμφωνα με αυτή, κάθε μαθητής καλείται να γράψει σε ένα χαρτάκι , με ποιόν μαθητή θα ήθελε να κάθεται στο ίδιο θρανίο εκτός απ΄αυτόν με τον οποίον ήδη κάθεται. Με αυτόν τον τρόπο ο κάθε μαθητής συγκεντρώνει έναν βαθμό προτιμήσεων , ο οποίος είναι ένας δείκτης δημοφιλίας του κάθε ενός μαθητή. Καλό είναι να συμβουλευθεί ο καθηγητής και τα αποτελέσματα των εκλογών για τις μαθητικές κοινότητες τα πρακτικά των οποίων φυλάσσονται στο γραφείο του Δ/ντη του σχολείου. Στην συνέχεια ο εκπαιδευτικός καταστρώνει το εξής διάγραμμα σημειώνοντας τις προτιμήσεις «από ποιόν σε ποιόν» με βέλη:



Για παράδειγμα στο παραπάνω διάγραμμα , ο μαθητής Δ , προφανώς είναι ο πλέον δημοφιλής, είναι τρόπον τινά το «επίκεντρο της τάξης» και δεν απομένει , να γίνει πραγματικά το κατά κυριολεξίαν κέντρο βάρους της τάξεως , τοποθετούμενος στο μέσον της αίθουσας διδασκαλίας , ώστε οι αποστάσεις να είναι οι ελάχιστες (Ενδιαφέρον πρόβλημα!) . Στην πράξη, βεβαίως αυτό πρέπει να γίνει στην αρχή της χρονιάς και να είναι επαρκώς ενημερωμένος ο καθηγητής. Λίγο δύσκολο πρακτικά , αλλά όχι κι ακατόρθωτο, αν υπάρχει ο προγραμματισμός εκ των προτέρων.

<u>5. Κάποιες άλλες διδακτικέςπροτάσεις σε σχέση με μετρήσεις μεγάλων αριθμών ή του απείρου.</u>

<u>5.1. Μια διδακτική πρόταση για την Α΄γυμνασίου με διαδικασίες επίλυσης προβλήματος : (Περιληπτική παρουσίαση)</u>

Δίδονται στις ομάδες 4-5 μαθητών ισόποσες κοινές βούρτσες , με την προτροπή να δουλέψουν οι μαθητές ομαδικά και να κατορθώσουν («αν μπορείτε!») να μετρήσουν πόσες τρίχες έχει η κάθε μία. Μπορεί και να «θεσμοθετηθεί» βραβείο για την ομάδα που θα κατορθώσει πρώτη να το πετύχει με κέρασμα τυρόπιτας στο κυλικείο.

Προηγουμένως ο καθηγητής έχει φροντίσει :

i)Να εξασφαλίσει την πίστωση των 8 ευρώ από την Σχολική επιτροπή που κοστίζουν οι 5 περίπου βούρτσες που θα χρειασθούν για το πείραμα.

ii)Να έχουν όλοι οι μαθητές ψαλιδάκι αλλά και χάρακα.

Μετά από την έναρξη της δραστηριότητας αναμένεται :

<u>Περίπτωση 1</u>: Η υποψήφια νικήτρια ομάδα δραστηριοποιείται , κόβει τον πρώτο θύσανο με τις τρίχες, τις μοιράζονται πρόχειρα στα 5 ματσάκια, μετρά ο κάθε ένας τις δικές τους, τις προσθέτουν και στην συνέχεια πολλαπλασιάζουν τον αριθμό που βρίσκουν με τον αριθμό των θυσάνων που έχει κι αυτός προκύψει είτε με πρόσθεση, είτε με πολλαπλασιασμό (αριθμός θυσάνων κατά μήκος Χ αντίστοιχο κατά πλάτος)

<u>Περίπτωση 2: </u>Όλες οι άλλες περιπτώσεις που θα μπορούσαν να προκύψουν ! Αυτή περιλαμβάνει όλες τις παραλλαγές που θα

μπορούσαν να βρουν οι μαθητές και που μπορεί να φανταστεί κάποιος εκ των προτέρων ή ακόμα (πολύ σπάνιο εδώ αλλά όχι κι απίθανο)

Στην συνέχεια οι απαντήσεις ανακοινώνονται δημόσια και παρατίθεται η μεθοδολογία που ακολουθήθηκε.

Οι απαντήσεις υποβάλλονται σε κριτική : Λ. χ. Γιατί δεν μέτρησαν όλες τις τρίχες και μόνο ενός θυσάνου; έχουν όλοι οι θύσανοι τον ίδιο αριθμό τριχών ; (ΟΧΙ!)   παρ όλα ταύτα το βραβείο της τυρόπιτας πρέπει να το πάρουν; μήπως είναι βλακεία να κάτσουμε να τις μετρήσουμε όλες;

Από την συζήτηση μπορεί να αναδειχθεί ότι καταστρέφουμε την βούρτσα και δεν κερδίζουμε σε μεγάλη ακρίβεια! Άρα το βραβείο πρέπει να πάει σε αυτή την ομάδα παρ΄ότι δεν μέτρησε πραγματικά όλες τις τρίχες……..

Μετά την δραστηριότητα, ανάλογα με τις δυνατότητες της τάξης, ο διδάσκων μπορεί να την κατευθύνει προς την δεύτερη δραστηριότητα που αυτή την φορά θα είναι θεωρητική .

Να βρουν και να διατυπώσουν έναν αξιόπιστο τρόπο σχετικά με το πώς θα μπορούσαμε να μετρήσουμε τα μαλλιά της κεφαλής μας.(!)

Αναμενόμενες απαντήσεις : Χωρίζουμε τα μαλλιά μας σε όμοιες κοτσίδες μετράμε την μία και μετά κάνουμε έναν πολλαπλασιασμό με τον αριθμό των κοτσίδων. (Για κορίτσια κυρίως)

Ζωγραφίζουμε ίσα τετραγωνάκια στο κεφάλι ενός κουρεμένου και μπαίνουμε στον κόπο να μετρήσουμε το ένα . Έπειτα μετράμε τα τετραγωνάκια και κάνουμε έναν πολλαπλασιασμό.

Μπορούν να προκύψουν κι άλλες απίθανες απαντήσεις που κρίνονται από την τάξη.

Μετά από την συζήτηση κι επικύρωση των αποτελεσμάτων από την τάξη, μπορεί να δοθεί για εργασία ατομική (οι ομάδες είναι δύσκολο να λειτουργήσουν εκτός σχολείου, εκτός αν κριθεί ότι αυτό είναι δυνατόν) το εξής πρόβλημα:

«Αν η Γη αποτελείτο από στραγάλια, πόσος θα ήταν ο αριθμός τους; »

(Στο σχολείο υπάρχει σχετικός πίνακας των πλανητών –και της Γης -με γεωμετρικά χαρακτηριστικά τους (εμβαδόν –όγκο –ακτίνα) Μπορεί να δοθεί και μια προθεσμία 10 ημερών για να το σκεφθεί καλά μαθητής.

Η επιτυχία και σε αυτή την εργασία θα πρέπει να είναι κάποιο σημαντικό κριτήριο ότι κατακτήθηκε η έννοια των πολύ μεγάλων αριθμών , τους οποίους ο μαθητής θα μπορεί να αντιμετωπίζει χωρίς συμπλέγματα και δέος μπρος το μέγεθος.

Στην Δευτέρα Γυμνασίου και στα πλαίσια του μαθήματος της Χημείας , θα μπορούσε σε κάποια άσκηση να ενταχθεί και κάποια άσκηση που όταν διδάσκεται ο αριθμός Avogadro , ανάμεσα στ΄άλλα , να υπάρχει και ένα πρόβλημα του τύπου:

«Η Ζάχαρη έχει Μ.Τ. $C_{11}H_{12}O_{22}$ Αν το 1 κιλό ζάχαρη κοστίζει 1 ευρώ , να βρεθεί πόσα ευρώ κοστίζει 1 μόριο ζάχαρης!»

Δίνονται τα Α.Β : Ο=16 , Η =1 , C=12

Η ενθάρρυνση της χρήσης υπολογιστικής μηχανής , είναι προς την κατεύθυνση της ευκολότερης αντιμετώπισης τέτοιων προβλημάτων . (Η διαίρεση 1/ 3χ $6,023X10^{23}$ δεν θα πρέπει να αποθαρρύνει τον μαθητή)

5.2. Επισημάνσεις για την Β’ Γυμνασίου

Επίσης στην Β΄γυμνασίου μπορούν να γίνουν οι εξής επισημάνσεις στις οικείες ενότητες του διδακτικού βιβλίου:

- Οι δεκαδικοί αριθμοί οι τερματιζόμενοι που τόσο πολύ χρησιμοποιούμε καθημερινά , είναι η ελάχιστη κλάση των αναγώγων κλασμάτων της μορφής $\frac{a}{2^n 5^m}$. όλες οι άλλες (διαισθητικά πάρα πολύ περισσότερες) περιπτώσεις παριστάνουν δεκαδικούς περιοδικούς.
- Οι τερματιζόμενοι δεκαδικοί είναι ουσιαστικά οι περιοδικοί με περίοδο το 0 ή και το 9 (για το 9 δεν γίνεται νύξη στο δ. βιβλίο)
- Η ισότητα 1,999999…..=2 μας δείχνει έναν πεπερασμένο αριθμό σπασμένο σε άπειρα κομματάκια .

5.3. Για την Α΄Λυκείου

Στην Α΄λυκείου μπορούν να προστεθούν στο κεφάλαιο των εξισώσεων και εφαρμογές του τύπου:

Η άπειρη παράσταση $\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}}+\ldots\ldots\ldots}$

Αν παριστάνει κάποιον αριθμό , μπορούμε να την χειριστούμε ως εξής:

Την βαπτίζουμε χ:

$$X=\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}}+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}$$ **τότε**

$$X^2=2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}}+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}$$ **τότε**

$$X^2-2=\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}}+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}$$

Όμως το δεύτερο μέλος είναι ίσο με το αρχικό X (!!!)

Δηλαδή , $X^2-2=X$
Ή $X^2-X-2=0$
Από όπου βρίσκω ότι X=-1 ή X=2
Η ρίζα X=–1 απορρίπτεται, διότι η άπειρη παράστασή μου είναι προφανώς θετική και ισούται –τελικά- με την άλλη ρίζα , το 2.

Ένα αξιοπρόσεκτο χαρακτηριστικό της άπειρης αυτής παράστασης είναι ότι οποιοδήποτε κομμάτι της δεξιά από κάθε 2 στην ουσία είναι ίδιο με ολόκληρο τον εαυτό της , αφού από την άπειρη παράσταση , όσα αρχικά τμήματα και να αποκόψουμε το εναπομένον τμήμα θα μένει ίσο με το αρχικό!
Με άλλα λόγια έχουμε μπροστά μας το εκπληκτικό αποτέλεσμα , ότι υπάρχουν «μαθηματικά αντικείμενα» που **το μέρος είναι ίσο με το όλο!**

Την παραπάνω διαπίστωση δεν μπορεί να την δεχθεί ή να την φανταστεί το ανθρώπινο μυαλό, αφού από τον κόσμο των πραγματικών μας εμπειριών αν από ένα αντικείμενο κόψω ένα

κομμάτι του αυτό που θα μείνει δεν μπορεί να είναι ίσο με το αρχικό κομμάτι πριν το κόψω!

Αυτό το εκπληκτικό συμβαίνει σε ορισμένα[31] άπειρα μαθηματικά αντικείμενα σαν την προηγούμενη παράσταση!…………

<u>Άσκηση:</u> Μπορείτε να χειριστείτε μήπως με τον ίδιο τρόπο και την παράσταση :

$$1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\dots\dots\dots}}}}}}.$$

(Είναι ο λόγος της χρυσής τομής!)

5.3. Ένα πρόβλημα για την Β΄Λυκείου:

«Μέσα στην τάξη Φτιάχνουμε ένα κύβο. Στην συνέχεια έναν άλλο με μισό μήκος ακμής και τον βάζουμε πάνω στον άλλο. Στην συνέχεια φτιάχνουμε έναν τρίτο κύβο με την μισή ακμή του δευτέρου και τον θέτουμε πάνω του. Αυτό υποθέτουμε ότι μπορούμε να το κάνουμε ασταμάτητα επ΄άπειρον .

Θα φθάσουμε στο ταβάνι της αίθουσάς μας ή όχι;»

---

[31] Βεβαίως αυτά τα «αντικείμενα» λέγονται μορφοκλασματικά αντικείμενα (Fractals) και εκείνο για το οποίο πρέπει να αναρωτηθούμε , είναι αν πρέπει να εισαχθεί έστω και ως νύξη για τις ιδιοτροπίες του άπειρου , την στιγμή που στο διαδύκτυο και σε κάθε υπολογιστή , υπάρχουν δωρεάν προγράμματα παραγωγής φράκταλ σχεδίων και ο μαθητής έρχεται σε επαφή μαζί τους χωρίς να ξέρει για την δομική τους ιδιότητα , δηλαδή της αυτοομοιότητας.

Και το παραπάνω πρόβλημα μπορεί να εισαχθεί με διαδικασίες επίλυσης προβλήματος , με σχετικό φύλλο εργασίας , όπου οι μαθητές καθ΄ομάδες καλούνται να απαντήσουν στο πρωταρχικό ερώτημα του προβλήματος. Οι μαθητές μπορούν να έχουν ήδη διδαχθεί το άθροισμα απείρων όρων της φθίνουσας γεωμετρικής προόδου με λόγο λ : |λ|<1.

Η απάντηση στο ερώτημα δεν είναι προφανής , ούτε μπορεί να προκύψει διαισθητικά ή ενορατικά αφού η ενόραση ή διαίσθηση σε σχέση τουλάχιστον με το άπειρο και ιστορικά και διδακτικά έχει αποδειχθεί ότι δίνει λανθασμένες εντυπώσεις[32]. Είναι βέβαιο ότι θα προκύψει αντιπαράθεση απόψεων μέσα στην τάξη , τις οποίες θα χειριστεί διδακτικά ο δάσκαλος. Έτσι:

- (Σωστή εικασία) Αν φτιάξω έναν «αρκούντως μεγάλο κύβο» ακόμα και με τον δεύτερο κύβο , φθάνω και ξεπερνάω το ταβάνι.
- (Λανθασμένη εικασία)Αν φτιάξω όμως έναν πολύ μικρό, πάλι φθάνω διότι λόγω των απείρων βημάτων δεν θα έχω κανένα περιορισμό.

Εδώ , έτσι ώστε να είναι αποτελεσματική η σύγκρουση της νέας γνώσης με την λανθασμένη περί απείρων διαδικασιών πρώτης εντύπωσης, πρέπει να δοθεί έμφαση, στις αντιπαραθέσεις και ισχυρισμούς μεταξύ των ομάδων.

Μετά την αντιπαράθεση, καλούνται οι ομάδες να ξεκινήσουν από διαφορετικά αρχικά μήκη ακμής κύβου και να διαπιστώσουν

[32]Ο Χρόνης Κυνηγός (1996«Μαθηματική εκπαίδευση» Σημειώσεις του μαθήματος Παιδαγωγικά)σελ.57 γράφει ότι έννοια του ορίου είναι δύσκολη και χρειάζεται ιδιαίτερη προσοχή στις διαισθητικές αντιλήψεις.

αν το άπειρο άθροισμα ξεπερνά το ύψος της αίθουσας που είναι 6 m.

Κάθε ομάδα αναλαμβάνει κάποια πιθανά μήκη έναρξης της διαδικασίας : 1m , 2m , 3m , 4m , 5m.

Μετά το πέρας των διαδικασιών και την ανακοίνωση των αποτελεσμάτων , τίθεται το ερώτημα:

« Ποιο είναι το πιο μεγάλο μήκος ακμής που με οδηγεί σε αδυναμία πλησιάσματος του ταβανιού; Αν δεν ξέραμε το ύψος του ταβανιού ποιο θα ήταν το πρώτο μήκος ακμής κύβου που με οδηγεί σε αδυναμία πλησιάσματος του ταβανιού; »

Εδώ καλούνται να αναπτύξουν εικασίες σχετικά και με το προηγούμενο αποτέλεσμά τους και να το γενικεύσουν .
ουσιαστικά καλούνται να δουν το σχήμα

$\frac{a}{2}+\frac{a}{4}+\frac{a}{8}+.........=a$ και επίσης να συνειδητοποιήσουν ότι μετά τον πρώτο όρο τον α/2, όλο το επ΄έπειρον άθροισμα κάνει κι αυτό α/2 ή να δουν ότι το προηγούμενο σχήμα είναι ουσιαστικά το παρακάτω:

$$\frac{a}{2}+\frac{a}{4}+\frac{a}{8}+.........=a(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+.......)=a1=a$$

το συμπέρασμα που θα προκύψει από τα προηγούμενα , μπορεί να ισχυροποιηθεί με το να κληθούν οι ομάδες να απαντήσουν με το να απαντήσουν στα εξής ερωτήματα:

«Αν υποθέσουμε ότι βάφουμε όλους τους άπειρους κύβους ! Θα χρειασθούμε άπειρη χρωστική ή όχι;»

«Αν όλοι οι κύβοι μου είναι από ομογενές (συμπαγές) μέταλλο που έχει πυκνότητα $\rho=5gr/cm^3$. Ποια είναι η μάζα όλων των άπειρων κύβων ;
Είναι γνωστό από την χημεία ότι το τελευταίο όριο όγκου που μπορεί να θεωρηθεί σίδερος είναι το ένα μόριο σιδήρου. Σε αυτό το όριο μπορώ να φθάσω σε πεπερασμένα βήματα. Με την διαδικασία που κάνω, υπολογίζω άπειρες μάζες κύβων μικρότερες κι από το όριο του ενός μορίου.
Ποιο είναι το επίπεδο λάθους που κάνω με αυτή την παραδοχή;»

Αν υπάρξει κατάκτηση της έννοιας από τους μαθητές , αναμένεται να υπάρξει η σωστή απάντηση (μέσα από την διαδικασία κατάκτησής της) που λέει ότι όταν φθάσουμε στο επίπεδο μορίου, από κει και πέρα τα άπειρα βήματα μου προσθέτουν βάρος ενός ακόμα μορίου!…………

Πρέπει να σημειωθεί ότι κατά την ανάδειξη αυτής ης έννοιας , μπορεί σε κάποια στιγμή ένας μαθητής να σηκωθεί και να προχωρά από έναν τοίχο προς τον άλλο με διαδικασία διχοτόμησης του εναπομένοντος διαστήματος ή να επαναλάβει την διαδικασία με πεπερασμένα βήματα όταν το πρώτο βήμα γίνει παραπάνω από το μισό μήκος αιθούσης.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1) Ευγενία Κολέζα « Γνωσιολογική και διδακτική προσέγγιση των μαθηματικών εννοιών» εκδόσεις Leader Books 2000
2) Αθανάσιος Γαγάτσης «Διδακτική των μαθηματικών , θεωρία έρευνα» εκδόσεις art of text A.E. Θεσσαλονίκη 1995
3) Αθανάσιος Γαγάτσης «Θέματα διδακτικής των μαθηματικών» Θεσσαλονίκη 1993
4) Χρόνης Κυνηγός « Μαθηματική εκπαίδευση –Σημειώσεις στο μάθημα Παιδαγωγικά» αθήνα 1996
5) D . Hilbert: «Για το άπειρο» Εκδόσεις Τροχαλία , αθήνα 1998
6) Θ. Τριλιανός «μεθοδολογία Διδασκαλίας ΙΙ» εκδόσεις Αφοι Τολίδη , Αθήνα 1992
7) «Μια ώρα με τον Piaget- Συζήτηση για την διδασκαλία των μαθηματικών» Απόδοση στα Ελληνικά Ν. Ράπτη , Αθήνα 1977
8) P.J. Davis- R. Hers «Η μαθηματική Εμπειρία» Εκδόσεις Τροχαλία
9) Martin Gerder «Η μαγεία των παραδόξων» Εκδόσεις Τροχαλία
10) Δημήτρης Καραγιώργος « Το πρόβλημα και η επίλυση του – μια διδακτική προσέγγιση» εκδόσεις Σαββάλας
11) Γιώργος Πράσινος « Το άπειρο» εκδόσεις κώδικας 1986

12) Διονύσιος Αναπολιτάνος « Εισαγωγή στην φιλοσοφία των μαθηματικών»

13)Howard Eves «Μεγάλες στιγμές των μαθηματικών-μετά το 1650» εκδόσεις Τροχαλία

14) Jean Pierre Luminet – Marc Lachieze-Rey «Η φυσική και το άπειρο» Εκδόσεις Π. Τραυλός - Ε. Κωσταράκη.-